Abiturprüfung

Analysis

Anwendungsaufgaben

Teil 1

aus verschiedenen Bundesländern

Datei – Nr. 71301

Stand: 27. September 2013

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Hier eine Sammlung von Prüfungsaufgaben. Teilweise sind es abgeänderte Aufgaben, die inhaltlich umgestaltet und vor allem erweitert worden sind.

Diese Aufgaben erfordern nicht unbedingt den Einsatz eines CAS-Rechners. Teilweise werden dennoch Hilfen zum Einsatz eines CAS-Rechners gegeben.

Diese Sammlung wird immer wieder durch eine neue Aufgabe ergänzt.

Aufgabe 301-1

Thema: Wachstum mit Differenzialgleichung

a) In einen Behälter fließt von oben Wasser hinein. Durch ein Loch im Boden des Behälters fließt gleichzeitig auch Wasser ab. Zum Zeitpunkt t = x (Sekunden) mit $x \geq 0$ befinden sich g(x) Liter Wasser im Behälter, Zum Zeitpunkt t = 0 ist der Behälter leer. Der Zufluss ist konstant und beträft 0,5 Liter pro Sekunde. Zum Zeitpunkt t = x ist der momentane Abfluss $\frac{1}{200} \cdot g(x)$ Liter pro Sekunde. Daraus folgt für die momentane Änderung der Füllmenge g(x) die Gleichung

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot g(x)$$

1. Fragestellung (leichter):

Zeigen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = 100 - 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x}$ Lösung der Differenzialgleichung ist, für die gilt: $g(0) = 0$.

2. Fragestellung:

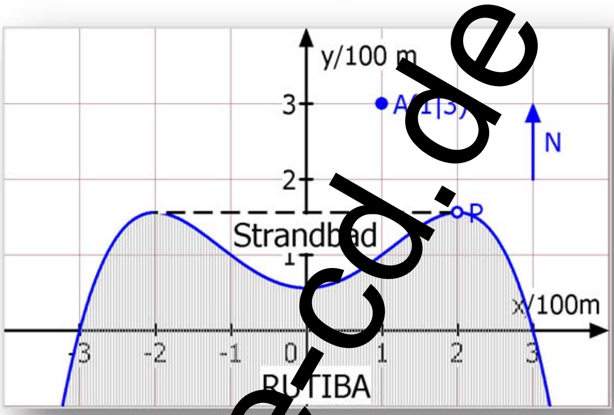
Berechne die Lösung g der Differentialgleichung unter der Randbedingung $g(0) = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Wassermenge im Behälter ständig zunimmt.
Welches Volumen muss der Behälter mindestens haben, damit kein Wasser überläuft?

c) Zu welchem Zeitpunkt x_H ist genau die Hälfte der bis dahin geflossenen Wassermenge im Behälter?

Verwenden Sie zur Berechnung von x_H das Newtonsche Näherungsverfahren mit dem Startwert $x_o = 320$. Dieses Verfahren ist abzubrechen, wenn sich die zweite Dezimale zum ersten Mal nicht mehr ändert. Das Ergebnis ist auf eine Dezimale zu runden.

Aufgabe 301-2 (Hamburg, Abitur GK 2009)



Die nebenstehende Abbildung zeigt den Nordteil der künstlich angelegten Insel ***Rutiba***.
Rutiba hat ein Strandbad, das durch eine Absperrkette von der offenen See getrennt ist (gestrichelte Linie).

Das Nordufer ist durch die Funktion

$$f:\ x \to -\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{2}+\frac{9}{16}$$

gegeben. (Eine Einheit entspricht 100 m in der Realität.)

Der Insel nördlich vorgelagert ist ein Felsen bei $A(1|3)$, der als Anlegestelle für Ausflugsdampfer dient. Diese Anlegestelle ist bisher nur durch eine Bootsverbindung vom nördlichsten Punkt P auf der Ostseite von Rutiba zu erreichen.

a) Bestätigen Sie rechnerisch, dass „östlich" (also rechts) von der *y*-Achse der „nördlichste" Punkt auf dem Graphen von *f* die Koordinaten $P\left(2\,|\,\frac{25}{16}\right)$ hat.

b) Berechnen Sie die größte (in y-Richtung gemessene) Entfernung der Kette vom Ufer und bestimmen Sie die Fläche des bestehenden Strandbades auf ganze m² gerundet.

c) Die Anlegestelle liegt im obigen Koordinatensystem bei $A(1|3)$. Ein Boot, das von P zur Anlegestelle fährt, muss einen bestimmten Kurs (= Winkel der Fahrtrichtung zur Nordrichtung) fahren. Ergänzen Sie die obige Abbildung durch das Einzeichnen dieses Sachverhalts und bestimmen Sie den Kurs und die Weglänge für die Fahrt.

Da das Strandbad aufgrund gefährlicher Strömungen häufig für den Badebetrieb gesperrt werden muss, soll es nun zu einem neuen, vor der rauen See geschützten Seebad umgebaut werden. Dazu liegen der Planungskommission zwei Entwürfe vor (siehe Anlage). Bei beiden Entwürfen wird ein Damm angelegt. Dadurch entsteht ein großer Badesee.
Die Breite des Dammes soll im Weiteren vernachlässigt werden.

d) Im ersten Entwurf (Plan 1) kann der Damm im Intervall $-2 \le x \le 2$ durch eine trigonometrische Funktion g beschrieben werden, die zwei Tiefpunkte genau an den Hochpunkten der Funktion f hat. Weisen Sie nach, dass jede Funktion der Form

$$g_a:\ x \to a\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot x\right)+a+\tfrac{25}{16} \qquad \text{mit } a>0$$

die geforderte Eigenschaft besitzt.

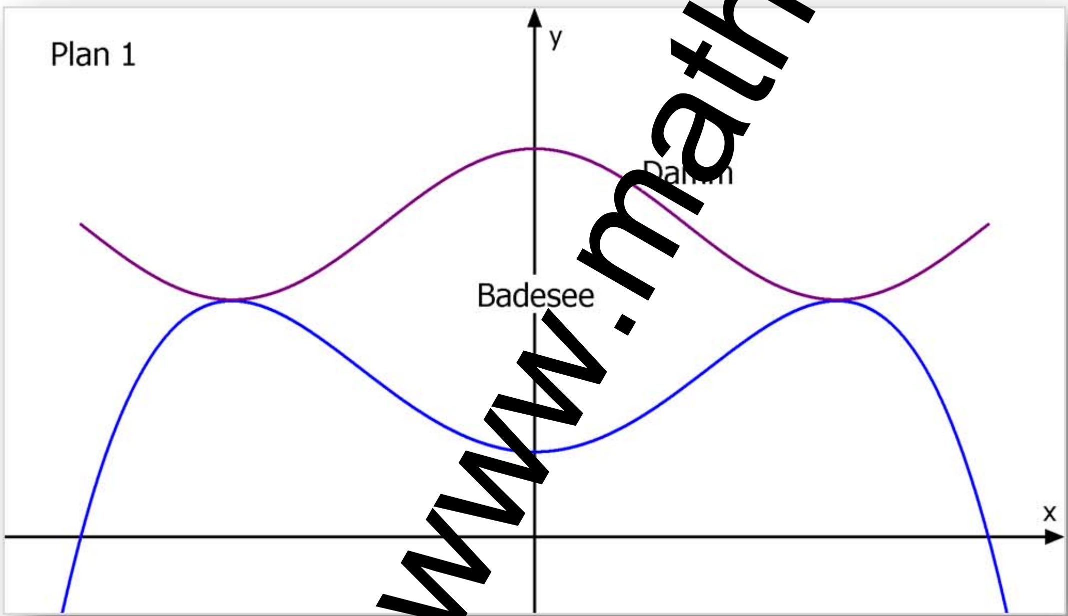
e) Ermitteln Sie den Parameter *a*, so dass die Fläche des neu entstandenen Badesees genau 80 000 m² beträgt.

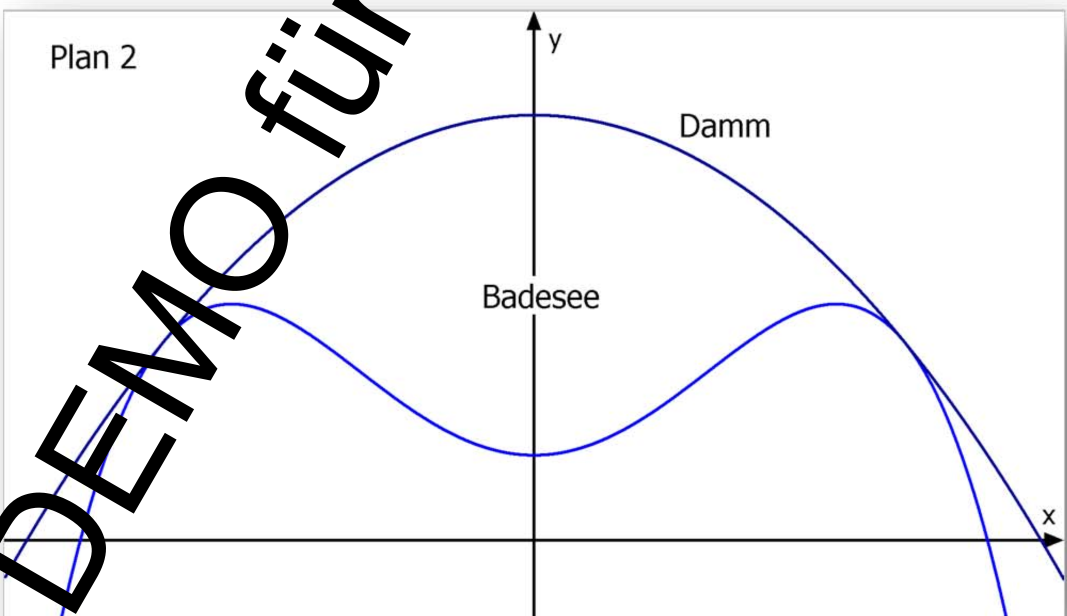
Im zweiten Entwurf (Plan 2) hat der Damm die Form einer Parabel. Für sie gilt:

$$h:\ x \to -\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{45}{16}$$

f) Berechnen Sie die Übergangsstellen zum alten Ufer (beschrieben durch die Funktion f) und weisen Sie nach, dass der Übergang knickfrei ist.

g) In dem zweiten (parabelförmigen) Entwurf soll eine Seebrücke von der Anlegestelle $A(1|3)$ zum neuen Damm gebaut werden. Aus Kostengründen soll die Seebrücke möglichst kurz sein.
Skizzieren Sie die Anlegestelle und die zu bauende Seebrücke in Plan 2 der Anlage und bestimmen Sie die Länge der Seebrücke.





Aufgabe 301-3 (Abitur 1998 – BW)

Das Schaubild K der Funktion f mit

$$f(x) = -\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

beschreibt zwischen dem Hochpunkt H von K und dem Punkt $P(-2 \mid f(-2))$ modellhaft das Profil eines Flusstales. Das Profil des angrenzen Geländes verläuft von H aus horizontal von P aus in Richtung der Geraden durch P und den Punkt $Q(3 \mid f(3))$.

a) Untersuchen Sie K auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen sowie Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden PQ.

Zeichnen Sie das Profil des Tales mit dem angrenzenden Gelände in ein Koordinatensystem ein.

Bei Hochwasser steigt das Wasser bis zum Punkt P.
Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Tales.

b) Von H soll eine unterirdische gerade Leitung ausgehen und im Punkt $B(u \mid f(u))$ mit $0 < u < 4$ ins Tal münden.
Bestimmen Sie B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

c) Bei Trockenheit ist der Wasserspiegel bis zum Punkt $R(1 \mid f(1))$ abgesunken.
Ab welcher Höhe über H ist dieser Punkt zu sehen?

Aufgabe 301-4

Abitur BW 2010 – Aufgabe I.3

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit $160\,\frac{m}{min}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.
Die Geschwindigkeit v(t) des Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} \quad ; t \geq 0$$

beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{min}$)

a) Skizzieren Sie das Zeit-Geschwindigkeit-Schaubild des Motorbootes für die ersten fünf Minuten.
Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum.
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab?
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?
Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot?

(6VP)

b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren?
Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück?
Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot?

(6VP)

c) Zum Zeitpunkt $t_O = 2{,}55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein. Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit. Ab dem Zeitpunkt t_O wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_O beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_O ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand.
Wann kommt das Boot zum Stillstand?

(6VP)

Lösungen

Lösung Aufgabe 301-1

a1) 1. Fragestellung:

Zu zeigen ist, dass die Funktion g mit $g(x) = 100 - 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x}$ Lösung der Differentialgleichung ist, für die gilt: $g(0) = 0$.

Ableitung: $g'(x) = -100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x} \cdot \left(-\frac{1}{200}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x}$

Einsetzen in die Differentialgleichung: $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot g(x)$

: $\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot \left[100 - 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x}\right]$

Berechnung der rechten Seite:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot \left[100 - 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x}\right] = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x}$$

Somit stimmen linke und rechte Seite überein.

Außerdem gilt: $g(0) = 100 - 100 \cdot e^{0} = 100 - 100 = 0$

a2) 2. Fragestellung: Berechnung der Lösung.

Vereinfachung der Gleichung durch die **Substitution:** $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot y$

Ableitung nach x: $z' = -\frac{1}{200} \cdot y'$ d. h. $y' = -200 \cdot z'$

Umformung der Differentialgleichung: $-200 \cdot z' = z$

Trennung der Variablen: $-200 \cdot \frac{dz}{dx} = z$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{1}{200} \cdot dx$$

Integration: $\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{1}{200} dx$

$$\ln|z| = -\frac{1}{200}x + C \quad \text{bzw.} \quad \ln|z| = -\frac{1}{200}x + \ln|K|$$

Umformen und zusammenfassen: $\ln|z| - \ln|K| = -\frac{1}{200}x$

$$\ln\left|\frac{z}{K}\right| = -\frac{1}{200}x$$

$$\left|\frac{z}{K}\right| = e^{-\frac{1}{200}x}$$

$$\frac{z}{K} = \pm e^{-\frac{1}{200}x}$$

$$z = \underbrace{\pm K}_{k} \cdot e^{-\frac{1}{200}x}$$

Rücksubstitution: $\frac{1}{2} - \frac{1}{200} \cdot y = k \cdot e^{-\frac{1}{200}x}$

$-\frac{1}{200} \cdot y = k \cdot e^{-\frac{1}{200}x} - \frac{1}{2} \qquad | \cdot (-200)$

$y = g(x) = -200 \cdot k \cdot e^{-\frac{1}{200}x} + 100 \qquad (2)$

Verwendung der Randbedingung: $g(0) = 0$

$g(0) = -200 \cdot k \cdot e^{0} + 100 = -200k + 100$

Durch Vergleichen folgt: $-200k + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 200k = 100 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2}$

Ergebnis aus (2): $y = g(x) = -100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x} + 100$

b) Die Ableitung der Füllstandsfunktion g ist: $g'(x) = -100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x} \cdot \left(-\frac{1}{200}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x}$

Man erkennt, dass für alle x gilt: $g'(x) > 0$

Also wächst g streng monoton, d. h. der Flüssigkeitspegel im Gefäß steigt fortgesetzt.

Die Funktion g hat einen Grenzwert:

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 100$, denn es gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{200}x} = 0$.

Gegen diesen Wert steigt der Pegel im Gefäß.

Wenn der Behälter also mindestens 100 Liter fasst, dann läuft er nie über.

c) Pro Sekunde fließt $\frac{1}{2}$ Liter Wasser zu. Nach der Zeit t = x sind also x Sekunden vergangen und somit $\frac{1}{2} \cdot x$ Liter Wasser zugeflossen.

Laut Aufgabe soll zum Zeitpunkt $t = x_H$ genau die Hälfte dieser Menge im Behälter sein.

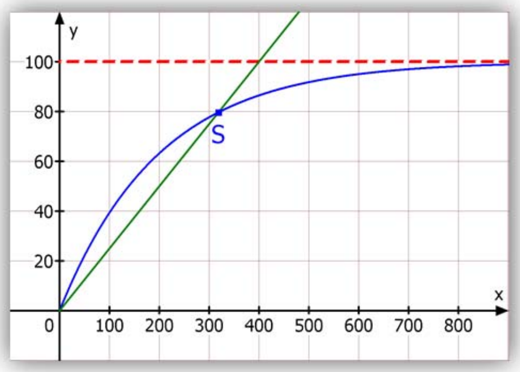
Also lautet die Bedingung: $g(x_H) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x_H\right] = \frac{1}{4} \cdot x_H$

d. h. $\boxed{100 - 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x_H} = \frac{1}{4} \cdot x_H} \qquad (1)$

Mein **CAS-Rechner TI Nspire** liefert zwei Ergebnisse:

$\text{solve}\left(100-100\cdot e^{\frac{-x}{200}}=\frac{x}{4},x\right) \qquad x=0. \text{ or } x=318.725$

Zum einen ist das natürlich am Anfang (t = 0) der Fall, und dann nach etwa 318,7 Sekunden.



Lösung mit dem Newtonschen Näherungsverfahren:

Aus (1) bildet man die Hilfsfunktion: $h(x) = \frac{1}{4} \cdot x + 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x} - 100$

Ihre Ableitung: $h'(x) = \frac{1}{4} + 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x} \cdot \left(-\frac{1}{200}\right)$

$h'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x}$

Das Newtonsche Näherungsverfahren arbeitet mit dieser Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$$

Setzt man hier die Funktionsterme ein, erhält man:

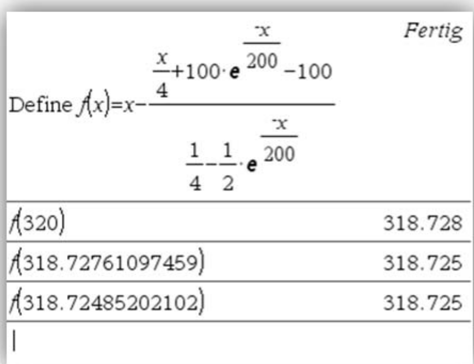
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{4} \cdot x_n + 100 \cdot e^{-\frac{1}{200}x_n} - 100}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{200}x_n}}$$

Laut Aufgabe beginnt man mit dem Startwert:

$x_0 = 320$

Man berechnet jetzt daraus weitere Werte mit einem geeigneten Rechner.

(1) Ich habe meinen CAS TI Nspire verwendet:



Zuerst wurde die Rechte Seite als neue Funktion definiert.

Dann wurde $x_1 = f(320) \approx 318{,}728$ berechnet.

Dann $x_2 = f(Ans) \approx 318{,}725$

Und schon hat sich die zweite Dezimale nicht mehr geändert.

Ich habe dann noch $x_3 = f(Ans) \approx 318{,}725$ ermittelt.

Ergebnis: Der gesuchte Zeitpunkt ist $x_H \approx 318{,}73$ Sekunden.

(2) Dann habe ich mit dem CAS-Rechner CASIO ClassPad eine rekursive Folge definiert und 5 Glieder berechnen lassen.